



TITLE:

# Exact Analysis of Universal Critical Behavior and Ergodic Properties of Chaos( Abstract\_要旨 )

AUTHOR(S):

Okubo, Ken-ichi

---

CITATION:

Okubo, Ken-ichi. Exact Analysis of Universal Critical Behavior and Ergodic Properties of Chaos. 京都大学, 2020, 博士(情報学)

ISSUE DATE:

2020-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k22584>

RIGHT:

許諾条件により本文は2020-04-01に公開

## 博士学位論文調査報告書

論文題目    Exact Analysis of Universal Critical Behavior and  
                 Ergodic Properties of Chaos  
                 (カオスにおける普遍的な臨界現象のExact性を用いた解析  
                 とエルゴード特性)

申請者氏名    大久保 健一

最終学歴    平成    25 年    3 月  
                 京都大学大学院情報学研究科    数理工学専攻修士課程    修了  
                 令和    2 年    3 月  
                 京都大学大学院情報学研究科    数理工学専攻博士後期課程  
                 研究指導認定見込

学識確認    令和    年    月    日 (論文博士のみ)

論文調査委員    京都大学大学院情報学研究科  
(調査委員長)    教 授    梅野 健

論文調査委員    京都大学大学院情報学研究科  
                 教 授    中村 佳正

論文調査委員    京都大学大学院情報学研究科  
                 教 授    青柳 富誌生

論文調査委員    京都大学基礎物理学研究所  
                 教 授    早川 尚男

( 続紙 1 )

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                         |    |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|--------|
| 京都大学                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 博士（情報学）                                                                                                                 | 氏名 | 大久保 健一 |
| 論文題目                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Exact Analysis of Universal Critical Behavior and Ergodic Properties of Chaos<br>(カオスにおける普遍的な臨界現象のExact性を用いた解析とエルゴード特性) |    |        |
| <p>(論文内容の要旨)</p> <p>少数自由度系のカオスの特性を、コンピュータによる数値計算により厳密に評価することは、その計算誤差が指数関数的に増大することから本質的な困難性を有することが解っている。一方、カオスの特性を厳密かつ解析的に評価することは、少数の例外を除いて困難であることが知られていた。</p> <p>本論文は、少数自由度力学系のカオスの特性を、主に、一次元写像で与えられる散逸系と、時間反転対称性を持つシンプレクティック写像で与えられる保存系の2種類のクラスにおいて、厳密かつ解析的な評価を報告したものであり、特に、前者においては、カオス・非カオス間の転移現象の臨界的振る舞い(間欠性ルート)を解析的に与え、後者においては、ある時間反転対称性を持つ保存系において、物理的な測度(SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) 測度)に収束するというある種の不可逆性を、系のAnosov性を証明することにより導出している。本論文の構成は、全4章から成っている。</p> <p>第1章は序論であり、Boltzmann以来の力学系の不可逆性(時間の矢)の起源に関わる問題を概観し、エルゴード定理、SRB測度、不変測度を解析的に与えられる可解カオス系の研究、及び、カオス・非カオス間転移の普遍性を示したFeigenbaumやPomeauとManneville等による数値計算結果を紹介し、併せて本論文で用いる数学的背景を簡潔にまとめている。</p> <p>第2章では、カオス力学系の臨界現象についての解析的な評価を述べる。ここで、臨界現象とは、力学系のパラメータを変化させた時、カオス性を示すリアプノフ指数が非正の非カオス状態から、正のカオス状態から転移するという系の不安定性が転移する現象を指し、臨界点は、リアプノフ指数が零となる点を指す。</p> <p>本章では、臨界点において無限測度を持つ一般化Boole変換(GB変換)とGB変換をさらに拡張した超一般化Boole変換(SGB変換)、そしてSGB変換をさらに拡張した拡張超一般化Boole変換(ESGB変換)において、リアプノフ指数の臨界的振る舞いを示す臨界指数を厳密に求めている。用いる手法は共通であり、正のリアプノフ指数を持つカオス領域において、Exact性という混合性よりも強い特性を示し、任意の初期密度関数が唯一つの平衡分布となるルベーグ測度に絶対連続な不変測度の密度関数に収束することを証明し、リアプノフ指数の解析表現を与え、臨界指数を与えた。この臨界指数は、厳密に1/2又は1であることを示し、1/2の値は、PomeauとMannevilleの数値計算によって予想されていた値を解析的に与えたものであり、この値が可算無限個の写像で成立することを示したことにより、このカオス・非カオス状態間の臨界現象の普遍性の一端を示すものとなっている。又臨界指数が1である場合は、新たな臨界現象の分類を与えるものとなっている。</p> <p>第3章では、ハミルトン系を時間反転対称性が保存する様に離散化したシンプレクティック写像を構成し、その不可逆性について述べる。本章では、まず、一般に時間反転対称性とExact性は数学的に両立できないことを示し、局所不安定条件を満足するパラメータにおいてAnosov性が成立することを証明する。Anosov性は、Exact性よりは弱いエルゴード特性であるが、物理的な平衡測度として与えられるSRB測度への収束を示すことが可能であり、時間無限大における統計分布への収束という意味での不可逆性を示したことになる。またAnosov性より混合性が成立することから、リアプノフ指数の近似的な解析表現を与え、この場合もカオス非カオス間転移の臨界点におけ</p> |                                                                                                                         |    |        |

る臨界指数が $1/2$ であることを併せて示している。  
第4章は結論であり、本論文のまとめと今後の課題を述べている。

(論文審査の結果の要旨)

本論文では、力学系の不安定性を特徴付けるリアプノフ指数の正負で判定するカオス状態・非カオス状態間の転移における臨界現象の振る舞いを示す臨界指数を、可算無限個の一次元写像力学系に対して厳密に与え、時間反転対象性を持つシンプレクティックな写像力学系を構成して、そのAnosov性を示すことにより、時間反転対称性と分布収束の意味での不可逆性が両立することを示している。

主な研究成果は以下の通りである。

1. 一次元写像力学系のExact性の証明

GB変換、及びSGB変換、ESGB変換において、可算無限個の写像力学系のExact性を証明した。このExact性の証明により、任意の初期密度関数が、唯一の平衡分布となるルベーグ測度に絶対連続な不変測度の密度関数に収束することを示している。更に、エルゴード定理より、リアプノフ指数も軌道不安定性による不変測度に関する積分として解析的に与えられる理論的根拠を与えている。

2. 厳密な臨界指数の導出

力学系においてパラメータを変化した時、カオス性を持たない状態からカオス性を持つ状態への転移において、リアプノフ指数が臨界的な振る舞いをし、急激にゼロから立ち上がることが知られている。特に、間欠性を持つ系においては、PomeauとMannevilleの数値計算によって、リアプノフ指数の臨界指数が $1/2$ であると予想され、その間欠性カオスにおける臨界指数の普遍性が示唆されていたが、一次元カオス力学系でその臨界指数 $1/2$ が厳密に示された系はなかった。申請者は、1.の結果を基礎として、GB変換、SGB変換、ESGB変換といった広いクラスの力学系において臨界点直上における臨界指数が厳密に $1/2$ であることを示している。また、Feigenbaumの周期倍分岐における臨界点直上のリアプノフ指数も数値計算で与えられているだけであり、本結果は、モデル、実験で観測されるカオス・非カオス間転移の臨界現象の臨界指数を初めて厳密に与えた結果と考えられる。また併せて、臨界指数が $1$ となる新しい臨界現象を発見したことも高く評価できる研究成果である。

3. Anosov性が証明可能な時間反転対称性を持つシンプレクティック写像の構成

運動エネルギーとあるポテンシャルからなるハミルトン力学系を考え、時間反転対称性を保存するシンプレクティック差分により時間反転対称性を保存するシンプレクティック写像が構成できる。申請者は、この様に構成した時間反転対称性を持つ写像を構成し、局所不安定条件を満足する時に、Anosov性が満足されることを示している。系がAnosov性を満足すれば、SRB測度として知られる平衡分布に収束することを示したこととなる。他のAnosov性が示された系としては、Sinaiのビリヤード等限られたものしか知られてなく、ハミルトン系の差分により構成された系のAnosov性が示された例は稀である。

また、申請者の出版論文のうち、GB変換の混合性を示しリアプノフ指数を厳密に与えた上で臨界指数 $1/2$ を導出した論文「Exact Lyapunov exponents of the generalized Boole transformations」(Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2016)において申請者が第二著者になっている点について、第一著者が位相同型変換を用いてGB変換の混合性を証明するアイデアのOutlineを与え、申請者と共同で同変換の混合性の証明を完成したものの、本論文の主結果の一つであるところの、GB変換のリアプノフ指数を厳密に計算し、臨界指数 $1/2$ を厳密に導出し、更には臨界指数 $1$ の臨界現象を発見する点において、申請者が主導的な役割を果たしていることを確認した。

以上のように、本論文は、幅広いクラスの一次元写像を構成し、Exact性を証明するとともに、厳密な臨界指数を初めて導出し、更には、Anosov性が証明可能な時間反転対称性を持つ写像を構成し、時間反転対称性とSRB平衡分布への収束を示す不可

逆性とが両立可能であることを具体的な系で明らかにするなど、優れた結果が得られている。特に3.において、少数自由度系である点、KS(Kolmogorov-Sinai)エントロピーと不可逆性との関係が示されていない等のギャップがまだあるものの、時間反転対称性を持つ力学系の不可逆性の起源の問題に関連して、学術上意義深い結果を与えている。

よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和2年2月14日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。なお、本論文のインターネットでの全文公表についても支障がないことを確認した。

要旨公開可能日：令和      年      月      日以降